Minule: Russellův paradox:

$y = \{x : x \notin x\}$ ... je třída pro ... jen $x \notin x$ ...

množina všech množin, které ... není mn.!

„nejsou vlastním prvkem".

Pokud $y \in y$, pak $y \notin y$ $\lightning$;
pokud $y \notin y$, pak $y \in y$ $\lightning$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\lightning$ v naivní TM. a tudíž šlo psát „$y \in$ ..."

V ZF: Proč by y měla být množina?
její existence by musela plynout z axiomů; neplyne! Pokud je ZF konzistentní (což předpokládáme, ale nevíme), pak y nemůže být množinou, neboť její existence by vedla ke SPORU (a ten v kons. teorii není).

Co tedy JE y?

Třídy

Množina $\times$ třída:

Třída není objektem TM (ZFC)

Třída je „soubor", který reprezentuje formuli jazyka TM. Je to způsob vyjadřování: $X = \{x : \varphi(x)\}$

Třída ... formule

Třídy • nemohou být prvky

• nemohou být kvantifikovány ($\Leftarrow$ kvantifikaci formulí)

Dává smysl: $X = \{x : \varphi(x)\}$, $Y = \{x : \psi(x)\}$

- $a \in X$ znamená $\varphi(a)$
- $X \cup Y = \{x : \varphi(x) \vee \psi(x)\}$
- $X \cap Y = \{x : \varphi(x) \wedge \psi(x)\}$

$\ulcorner a \in X \cap Y$ znamená $\varphi(a) \wedge \psi(a) \lrcorner$

Přijmeme-li tento zp. vyj., máme tzv. rozšířený JTM. Ten lze vždy redukovat na základní JTM (eliminací třídových termů).

Třídy značíme velkými písmeny.

(meta)definice: Třída, která není množinou se nazývá vlastní třída.

Příklad: • $\emptyset$ ... je mn., ale i třída

$\{x : x \neq x\}$

• každá mn. je třída:

a ... mn. ... $\varphi(x) : x \in a$

$X = \{x : \varphi(x)\} = \{x : x \in a\} = a$.

Tedy a je třída.

- Ne každá třída je množina.

Třída $\mathbb{V} = \{x : x = x\}$ je tzv. univerzální třída (univerzum množin) ... vlastní třída

(Dk: minule pomocí Russellova p.)

- $\bigcap \emptyset = \{x : \forall a \in \emptyset : x \in a\} = \mathbb{V}$.

definice průniku soubor — $\underline{\underline{a}}$.

- Platí: Pokaždé, když jsem byl na Měsíci, dal jsem si pivo.

- Vlastní třídy jsou „příliš velké"...

Spočetné a nespočetné množiny

Definice: • x je spočetná $\overset{\text{def.}}{\iff} x \approx \omega$.

• x je nejvýše spočetná $\overset{\text{def.}}{\iff}$ x je konečná $\vee$ x je spočetná

• x je nespočetná $\overset{\text{def.}}{\iff}$ x není nejvýše spočetná.

(Tj. nekonečná, co není spočetná.)

Věta: x je spočetná a $y \subseteq x$ $\longrightarrow$ y je nejvýše spočetná.

„Spočetnost je nejmenší nekonečná kardinalita."

Důkaz: Pokud y je konečná, jsme hotovi. Nechť y je nekonečná ($y \subseteq x$, x spoč.)

Chceme dokázat, že y je spočetné.

Najdeme prosté zobrazení $g : \omega \to y$

Indukcí, resp. rekursí definujeme:

$g(0) =$ nej. prvek y

$g(n+1) =$ další volný prvek

Indukce se nezastaví, neboť y je nekon. $\boxtimes$

Věta: (i) $\omega \times \omega$ je spočetná

(ii) A, B spočetná $\rightarrow$ $A \cup B$ je spočetná $\wedge$

$\wedge$ $A \times B$ je spočetná.

Důkaz: (i) 1. ZPŮSOB pomocí C.-B. V.:

- $g : \omega \longrightarrow \omega \times \omega$
  $n \longmapsto (n, 0)$ je prosté.

Tj. $\omega \preceq \omega \times \omega$.

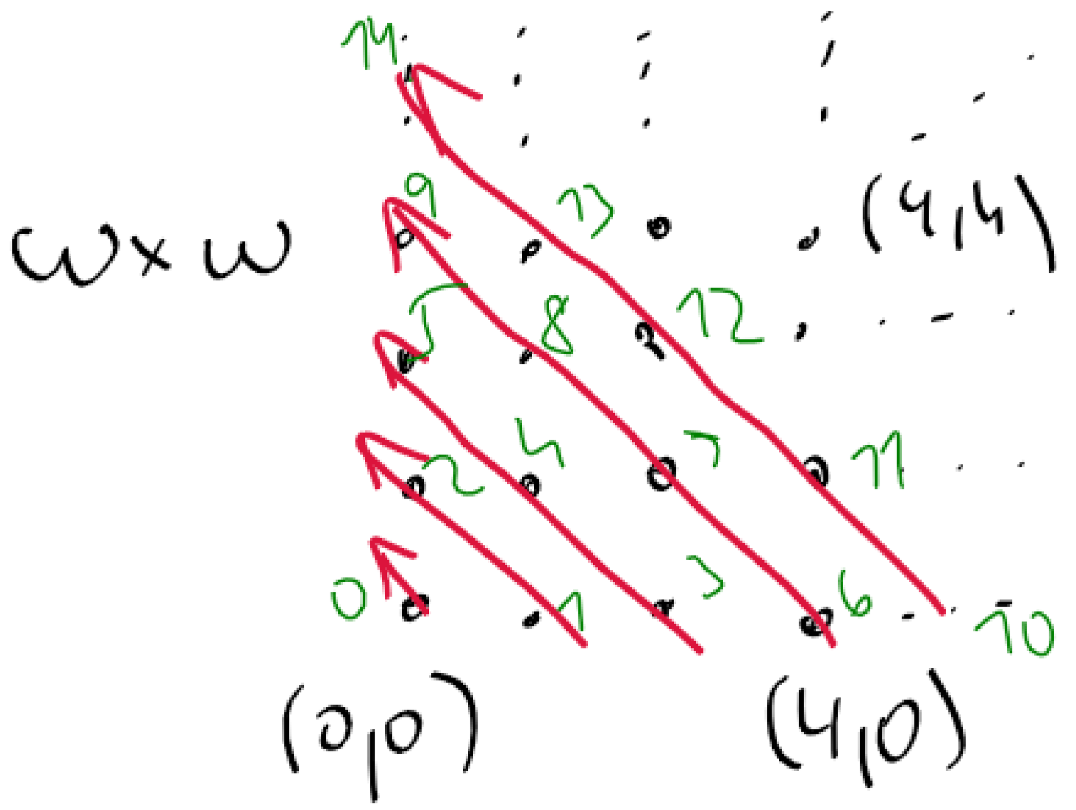
- $h : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$
  $(k, l) \longmapsto 2^k \cdot 3^l$ je prosté

(podle základní V aritmetiky)

Tj. $\omega \times \omega \preceq \omega$, a tedy podle CBV

jest $\omega \times \omega \approx \omega$.

2. ZPŮSOB „Očíslujeme mřížkové body přir. čísly, tj. seřadíme prvky $\omega \times \omega$ do posloupnosti.“:



na všechny se dostaneme

Existují i jiná usp. ☒

(ii) vynecháme: snadné cvičení (převeď na (i)) ☒

Věta: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ jsou spočetné množiny.

Dk: $\mathbb{Q} \approx \omega$

Pro $q \in \mathbb{Q}$ najdeme příslušného representanta $\frac{k \in \mathbb{Z}}{\ell \in \mathbb{N}}$ v zákl. tvaru. Tj.

ex. $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ prosté zobrazení.

Tj. $\mathbb{Q} \preccurlyeq \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \approx \omega$ ← z předch. V.

Tedy $\mathbb{Q}$ je nejvýše spočetná.

Ale $\mathbb{Q}$ je nekonečná $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ je spoč. ☒

Věta: $\mathbb{C} \approx \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\omega) \approx \boxed{{}^{\omega}2}$ ← pol. 0,1.

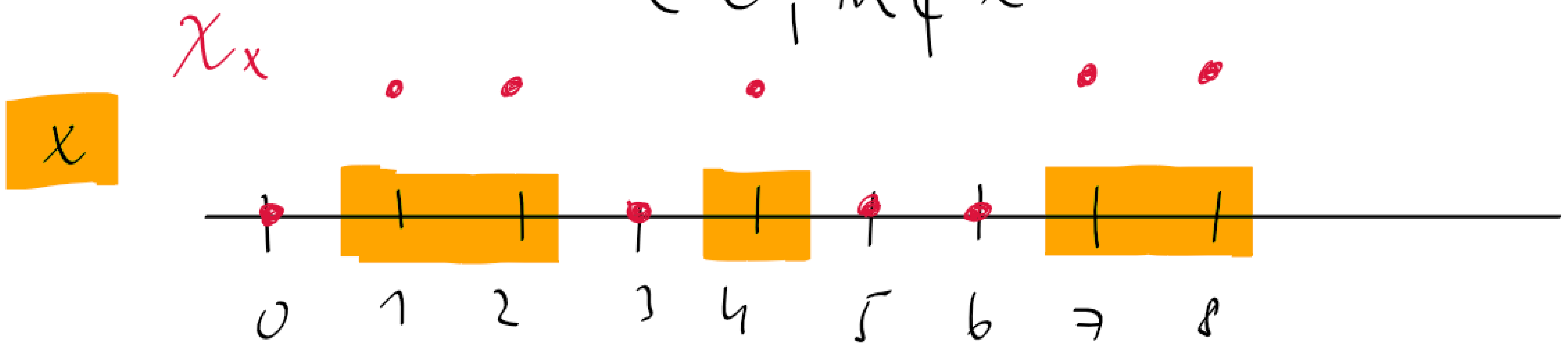
$\approx [0,1]$ $\approx$

Důkaz: • $f: \mathcal{P}(\omega) \to {}^{\omega}2$

$x \mapsto \chi_x$ je bijekce

a.

kde $\chi_x(n) = \begin{cases} 1, & n \in x \\ 0, & n \notin x \end{cases}$



Je-li $a \in (0,1]$, pak existuje jediný zápis $a = 0{,}a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots$ v 2-soustavě v němž je ∞-mnoho jedniček. $a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$

Tedy máme

$f : (0,1] \longrightarrow {}^{\omega}2$ prosté zobrazení

$a \longmapsto 0{,}a_0 a_1 a_2 \dots$

$(0,1] \precsim {}^{\omega}2$

<u>naopak</u>: Chceme ${}^{\omega}2 \precsim (0,1]$

Posloupnosti $f \in {}^{\omega}2$ přiřaď číslo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2f(n)}{3^{n+1}}$.

Pro různé rozvoje nejdou různá čísla.

Tedy jde o prosté zobr:

$${}^{\omega}2 \longrightarrow [0,1]$$

$$f \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2f(n)}{3^{n+1}}.$$

HINT

$0{,}_3 0222\ldots =$

$0{,}_3 1 = \frac{1}{3}$.

Tedy ${}^{\omega}2 \precsim [0,1]$. Celkem podle C-B.

$${}^{\omega}2 \approx [0,1] \approx \mathcal{P}(\omega).$$

Zbývá $[0,1] \approx \mathbb{R}$

„$\precsim$" jasné: $f(x) = x$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ je prosté

„$\succsim$" $g(x) : \frac{1}{\pi} \operatorname{arccotg} x$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ je prosté.

Celkem $[0,1] \approx \mathbb{R}$. $\boxtimes$

Vynecháme $\mathbb{R} \approx \mathbb{C}$ $(\simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R})$

<u>Definice</u>: X má mohutnost KONTINUA, pokud $X \approx \mathbb{R}$.

Věta: (Cantor) $(\forall x)\ x \prec \mathcal{P}(x)$

Důkaz: • $x \preccurlyeq \mathcal{P}(x)$:

$$f : x \longrightarrow \mathcal{P}(x) \quad \text{prosté!}$$

$$\underset{a}{\overset{\in}{}} \longmapsto \{a\} \quad \text{(ax. extenzionality)}$$

• $x \not\approx \mathcal{P}(x)$: Kdyby $x \approx \mathcal{P}(x)$,

tj. existuje bijekce $g : x \longrightarrow \mathcal{P}(x)$:

(„Russell") $y = \{a \in x : \overset{x}{a} \notin \overset{\mathcal{P}(x)}{g(a)}\}$

Pak $y \subseteq x$, tj. $y \in \mathcal{P}(x) = \mathrm{Rng}(g)$

(g je bijekce, takže je <u>na</u>!) Tzn.

$\exists b \in x : g(b) = y$.

Ptám se: $b \in y = g(b)$?

Pokud • $b \in y \Rightarrow b \notin y$

• $b \notin y \Rightarrow b \in y$ $\Big\} \Rightarrow$ ↯

⊠

Důsledek: „Existuje nekonečně mnoho nekonečných mohutností".

Axiom Výběru (AC)

(AC) ... axiom of choice.

$\underbrace{(ZF)}_{\text{už známe.}} + (AC) = (ZFC)$

(AC) ... z filosofických důvodů poněkud diskutabilní: zatímco ax. (ZF) umožňují „konstruovat množiny" dobře intuitivně představitelnými způsoby (suma, potence, dvojice, vydělení atd.), (AC) je tak trochu deus ex machina; nedává představu procesu „konstrukce".

Občas: Důkazy s (AC) ... „nekonstruktivní".

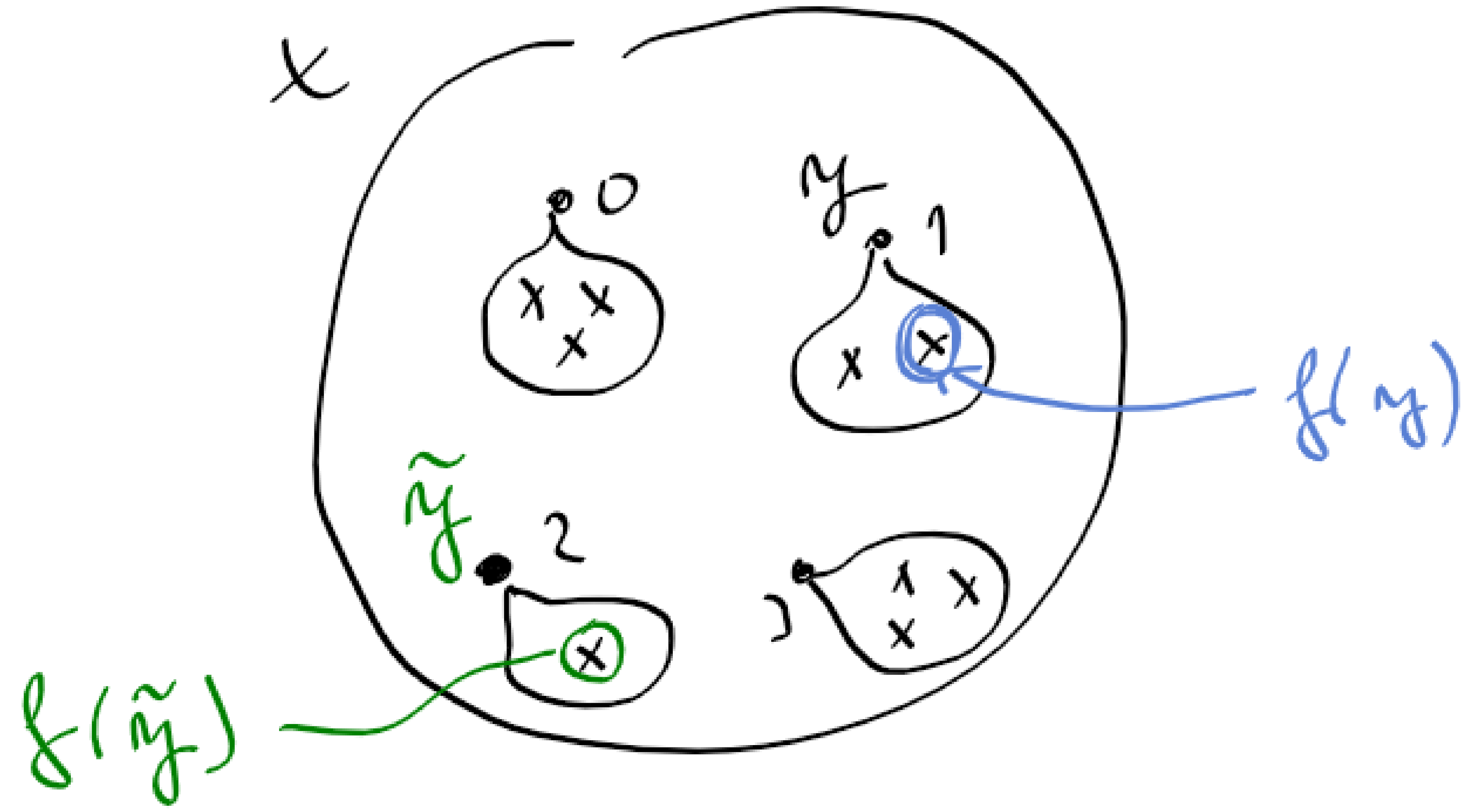
(AC) ... základní formulace:

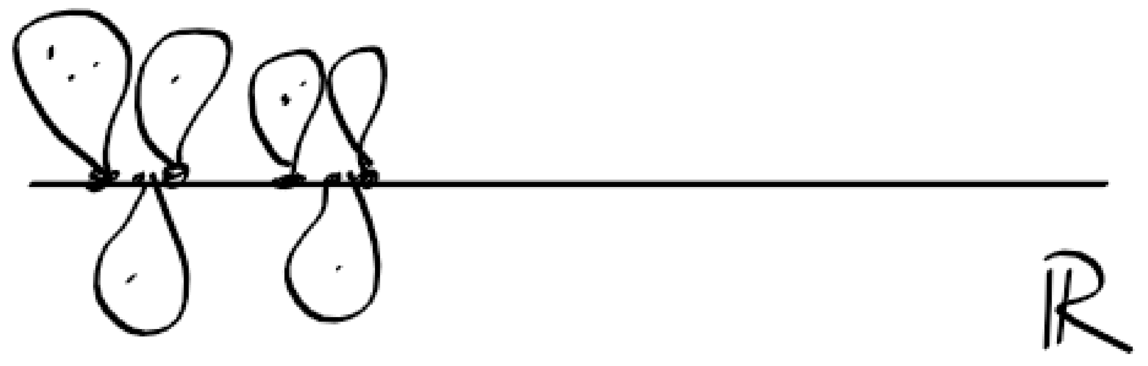
[Na každé množině existuje selektor.]

Definice: Buď x libovolná množina. Funkce $f: x \longrightarrow \bigcup x$ se nazve **selektor**, pokud

• $(\forall y)\; y \in x \wedge y \neq \emptyset \longrightarrow f(y) \in y$. Tj.

• $(\forall \emptyset \neq y \in x)\; f(y) \in y$.





Příklad: • (AC) $\longrightarrow$ $\forall X$ VP $\exists B \subseteq X$ B je báze.

• **Heineho věta**:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \left[\forall (a_n) \subseteq \mathbb{R} : (a_n) \text{ splňuje } (H1) \wedge (H2) \longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = A \right]$$

(H1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

(H2) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq a$.

Důkaz: $(\Longrightarrow)$ jednoduché na „$\varepsilon - \delta$".

$(\Longleftarrow)$ Sporem. Nechť $\neg\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = A\right)$

Tj. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in P(a,\delta) : f(x) \notin B(A,\varepsilon)$.

Chceme zkonstruovat posl. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující (H1) $\wedge$ (H2), pro kterou

$$\neg\left(\lim (a_n) = A\right).$$

Budeme indukcí (přesněji rekurzí) definovat posl (a_n).

$\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta = \frac{1}{n}$ ... $\exists a_n \in P(a,\delta)$

...

Vybíráme $a_n \in P(a, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$

z nekonečně mnoha množin! $\longrightarrow$ AC

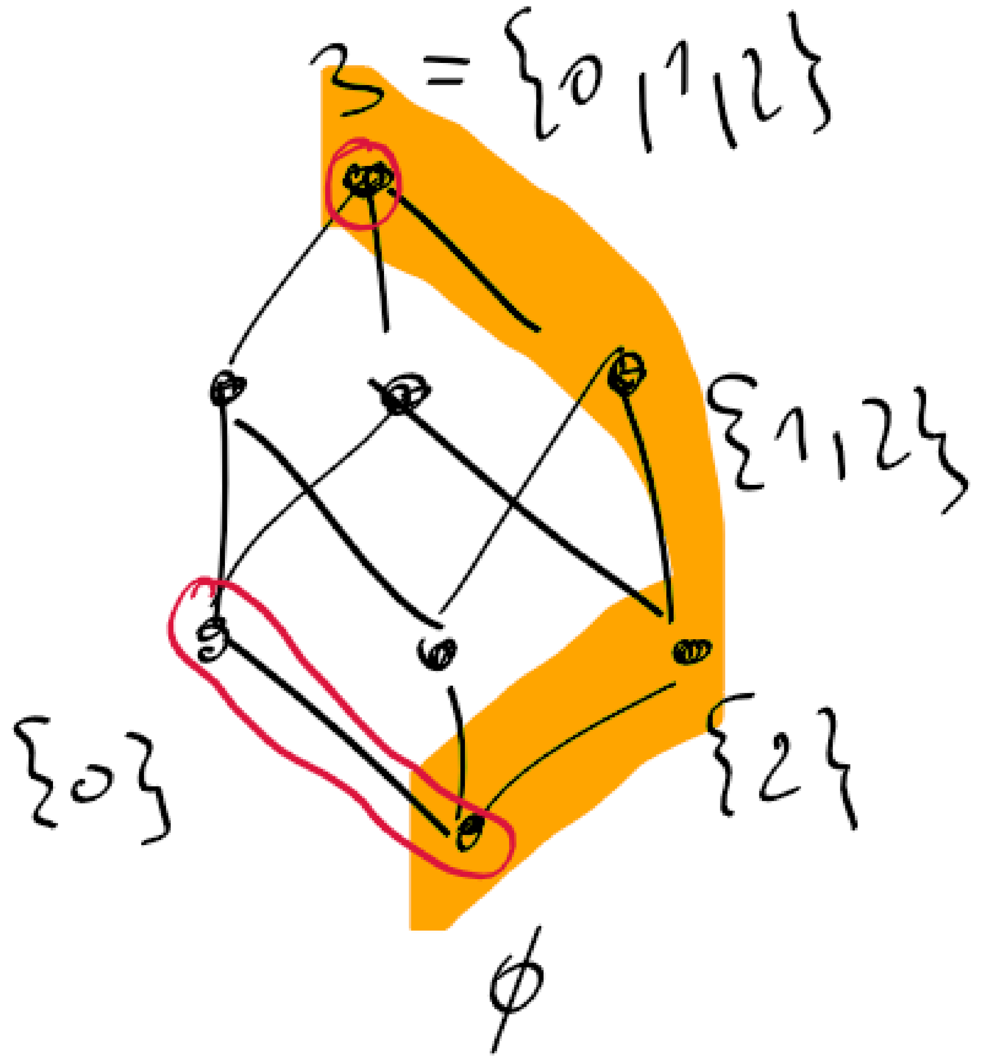
Zornovo lemma $\longleftrightarrow$ (AC)

(PM) ... princip maximality

(PM) $\longleftrightarrow$ (AC). (Bez dk.)

Definice: Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Řekneme, že $C \subseteq A$ je řetězec, pokud $(C, \leq)$ je lineárně usp.

Příklad: $(P(3), \subseteq)$ není lineární usp.



$C = \{\emptyset, \{0\}, 3\}$ je řetězec.

(PM): Je-li $(A, \leq)$ uspořádání, ve kterém každý řetězec má majorantu (tj. horní závoru), potom $(A, \leq)$ má pro každé $a \in A$ maximální prvek $m \geq a$.

Věta: $\forall X$ VP $\exists B \subseteq X$: B je báze.

Důkaz: Mějme $\mathcal{L} = \{L \subseteq X : L \text{ je LNZ}\}$. $(\mathcal{L}, \subseteq)$ je uspořádaná množina: Cv.

Chceme
- najít $M \in \mathcal{L}$ maximální.
- ukázat, že M je báze (Cv.)

$\to$ Pomocí (PM):

Budiž $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}$ libovolný řetězec.

Musíme ověřit, že $\mathcal{C}$ má h. z.

Platí (protože $\mathcal{C}$ je řetězec), že

$$\forall K, L \in \mathcal{L} : K \subseteq L \vee L \subset K \vee L = K.$$

Tvrdím, že $\underbrace{\bigcup \mathcal{C}}_{H}$ je h. z. $\mathcal{C}$.

Zřejmě $H \supseteq L$ pro lib. $L \in \mathcal{C}$.

Chceme $H \in \mathcal{L}$ (kdybychom, tak to nemůže být h. z. $(\mathcal{L}, \subseteq)$).

Tj. chceme, že H je LNZ.

Nechť $v_1, \dots, v_n \in H = \bigcup \mathcal{C}$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0.$$

Chci: $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

najdeme $L_1, L_2, \dots, L_n \in \mathcal{C}$, že $v_1 \in L_1$, $v_2 \in L_2$, …, $v_n \in L_n$

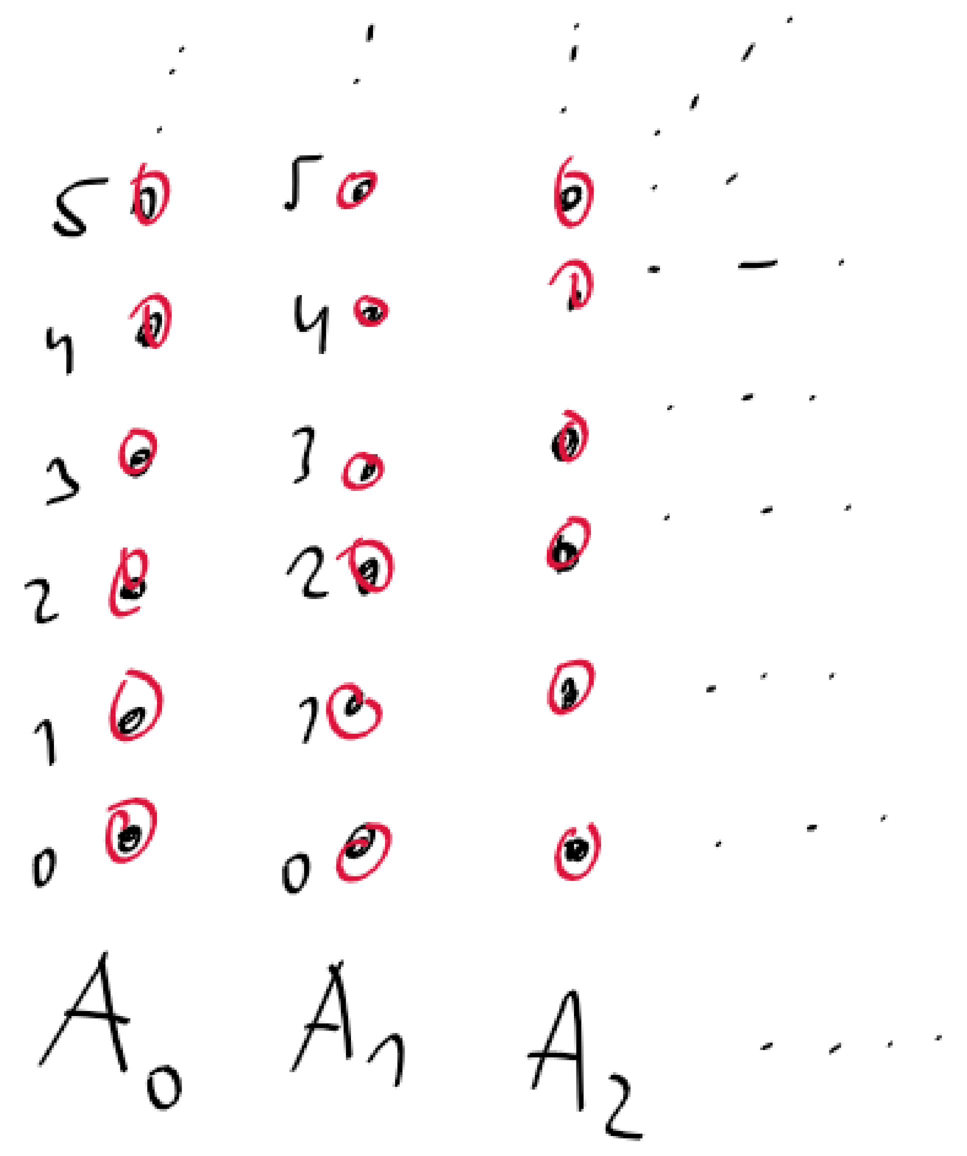
$L_1, \dots, L_n$ jsou lineárně usp., je jich konečně mnoho, takže je jasné, že ex. maximum: $\tilde{L} = \max(L_1, \dots, L_n) = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$.

Tedy $v_1, \dots, v_n \in \tilde{L}$ ale $\tilde{L}$ je LNZ, a tedy musí být $c_1 = c_2 = \dots c_n = 0$.

Závěr: (PM) $\Rightarrow \exists$ maximální prvek $M \in \mathcal{L}$.

Význam (AC):

- Pokud $A_0, A_1, A_2, \dots$ jsou spočetné mn., tak $\bigcup_{i\in\omega} A_i$ je spočetná.



$$\approx \underbrace{\omega \times \omega \overset{\text{nutné}}{\approx} \omega}_{\text{bez (AC)}}$$

Teď už to jasné je, napsat bijekci je lehké.

Tak, že je lze přeskládat, aby vznikla plná koule o 2-násobném poloměru.

- $\exists$ lebesgueovsky neměřitelná $\subseteq \mathbb{R}$
- Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$ je σ-aditivní.
- $\forall$ těleso má alg. zúplnění
- $\preccurlyeq$ je trichotomická na V

(tj. $\forall A \ \forall B \ \exists f$: $f: A \to B$ je prosté $\vee$ $f: B \to A$ je prosté)

<u>Paradoxy</u>:

- $(\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R})(\forall I \subseteq \mathbb{R}$ interval$)$ $f[I] = \mathbb{R}$.
- $(\exists X \subseteq \mathbb{R}^2)(\forall \ell \subseteq \mathbb{R}^2$ přímka$)$: $\ell \cap X \approx 2$
- Banach–Tarského „paradox": Plnou kouli v $\mathbb{R}^3$ lze rozložit na konečně mnoho částí,